数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 23-28



# Sierpiński gasket 上の エネルギー密度関数の不連続性

京都大学　大学院理学研究科 * 日野　正訓 †
Masanori HINO
Graduate School of Science,
Kyoto University
京都大学　大学院人間・環境学研究科 ‡ 伊縫　寛治 § (講演者)
Kanji INUI
Graduate School of Human and Environmental Studies,
Kyoto University

**概要**

Sierpiński gasket は, 理想的な自己相似性を持つフラクタル図形の典型例である. この図形上に自然に定まるエネルギー密度関数の性質について考察を行う. Bell, Ho, and Strichartz は, 2 次元 Sierpiński gasket 上においてその関数がいたるところ不連続であることを示した. 本稿では, 高次元 Sierpiński gasket の場合について類似の性質を論じる.

(The Sierpiński gasket is one of the most typical self-similar fractals. We study some properties of the energy density functions defined on it. In the earlier studies, Bell, Ho and Strichartz proved that these functions are discontinuous at every point for the 2-dimensional Sierpiński gasket. We will discuss the analogue of this property for higher-dimensional Sierpiński gaskets.)

## 1　序論

フラクタル図形上の解析学は, 複雑な構造をもつ対象におけるさまざまな現象を解析するため, 理想化されたモデルにおける解析の理論として研究が進められてきた. 現象の例をあげると, フラクタル図形上において振動はどのように伝わるか, あるいは, フラクタル図形上において熱はどのように拡散するかといったものである. この理論は物理学や化学および生物学などの分野において重要性が認識され始め, ここ 30 年で大きく理論が発展した.

2 次元 Sierpiński gasket (以下, 2 次元 S.G. と表す) は, 理想的な自己相似性を持つフラクタル図形の典型例であり, その図形上の解析学はこれまで詳しく研究されてきた. 本稿では, 2 次

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 Kitashirakawa Oiwake-cho, Sakyo-ku, Kyoto, JAPAN 606-8502
† e-mail:hino@math.kyoto-u.ac.jp
‡ 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町 Yoshida-nihonmatsu cho, Sakyo ku, Kyoto, JAPAN 606-8501
§ e-mail:inui.kanji.43a@st.kyoto-u.ac.jp

元 S.G. を高次元に自然に拡張した $N$ 次元 S.G. 上で "エネルギー密度関数" と呼ばれる関数の性質について考察する.

エネルギー密度関数を定義するには，いくつかの概念を導入する必要がある. これらは，$\mathbb{R}^d$ 上で定義される概念との類似物として定義される. 次節で正確な定義を行う前に，対応表を以下に掲げておく.

$$
\begin{array}{rcl}
\text{S.G. 上の (相互) エネルギー形式 } (\mathcal{E},\mathcal{F}) & \longleftrightarrow & \mathcal{E}(f,g)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}(\nabla f(x),\nabla g(x))\,\mathrm{d}x \\
\text{エネルギー測度 } \nu_f & \longleftrightarrow & \nu_f(\mathrm{d}x)=\dfrac{1}{2}|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x \\
\text{調和関数 } h & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^d \text{上の調和関数} \quad h \\
\text{Kusuoka measure } \nu & \longleftrightarrow & d \text{ 次元 Lebesgue 測度} \\
\text{エネルギー密度関数 } \dfrac{\mathrm{d}\nu_h}{\mathrm{d}\nu} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{2}|\nabla f|^2
\end{array}
$$

## 2 設定

本節では，主定理を述べるための数学的な枠組みを文献 [4, 6] に基づいて準備する.

### 2.1 $N$ 次元 Sierpiński gasket とグラフ近似

以下では $N$ を 2 以上の自然数とする.

**定義 2.1.** $\mathbb{R}^N$ 内における $N$ 単体を 1 つとり，その頂点を $q_0,q_1,\dots,q_N$ とする. $V_0:=\{q_0,q_1,\dots,q_N\}$ とする. さらに，$i\in\{0,1,\dots,N\}$ に対して，$F_i\colon\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ を $F_i(x):=(x+q_i)/2$ と定める. このとき，

$$K=\bigcup_{i=0}^N F_i(K)$$

を満たす唯一の空でないコンパクト集合 $K$ を $N$ 次元 Sierpiński gasket という.

この集合を SG と書き, 以下では $N$ 次元 Sierpiński gasket を省略して $N$ 次元 S.G. と記す. 以後, 次元 $N$ は固定して考えるため, 記号 SG には $N$ を明示しない.

$E_0:=V_0\times V_0$ と定める. 自然数 $m$ に対して, SG の部分集合 $V_m$ と $V_m$ 上の関係 $E_m$ を，帰納的に以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
V_m &:= \bigcup_{i=0}^N F_i(V_{m-1}) \quad (m\in\mathbb{N}_{\geq 1}),\\
(x,y)\in E_m &\Longleftrightarrow \text{ある } i=0,\dots,N \text{ が存在して } x,y\in F_i(K) \text{ かつ}\\
&\qquad (F_i^{-1}(x),F_i^{-1}(y))\in E_{m-1}.
\end{aligned}
$$

この $(V_m,E_m)$ $(m\in\mathbb{N})$ を $N$ 次元 Sierpiński gasket の近似グラフ (列) と呼ぶ. 集合列 $\{V_m\}_{m=0}^\infty$ は単調増大で, それらの和集合の閉包は $N$ 次元 S.G. と一致することに注意する. この事実より, SG は連結な有限グラフにより近似されていると見なすことができる.

## 2.2 $N$ 次元 Sierpiński gasket 上のエネルギー

**定義 2.2.** $m \in \mathbb{N}$ と SG 上の実数値関数 $f$, $g$ に対して,

$$\mathcal{E}_m(f,g) := \left(\frac{N+3}{N+1}\right)^m \frac{1}{2} \sum_{x \in V_m} \sum_{(y,x) \in E_m} (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$$

と定める.

このとき, 任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の $f\colon \mathrm{SG} \to \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{E}_m(f,f) \leq \mathcal{E}_{m+1}(f,f)$ が成り立つ. この事実をふまえて次の命題を得る.

**命題 2.3** ([4, Theorem 2.2.6])**.** SG 上で定義された $\mathbb{R}$ 値連続関数全体の集合を $C(\mathrm{SG};\mathbb{R})$ で表す.

$$\mathcal{F} := \{f \in C(\mathrm{SG};\mathbb{R}) \mid \mathcal{E}(f,f) := \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_m(f,f) < \infty\}$$

とすると $\mathcal{F}$ は $C(\mathrm{SG};\mathbb{R})$ の部分 $\mathbb{R}$-代数である. さらに, $f, g \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{E}(f,g) := \frac{1}{2}\{\mathcal{E}(f+g,f+g) - \mathcal{E}(f,f) - \mathcal{E}(g,g)\}$$

と定めるとき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は非負定値の 2 次形式となる.

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を SG 上の（標準）エネルギー形式という.

## 2.3 $N$ 次元 Sierpiński gasket 上のエネルギー測度

次の命題より, $\mathcal{F}$ の各元に対応する SG 上の測度が定まる.

**命題 2.4** ([6, Section 5.3])**.** $f \in \mathcal{F}$ に対し, 以下を満たす SG 上の測度 $\nu_f$ がただ一つ存在する.

$$\int_{SG} \varphi \, \mathrm{d}\nu_f = \mathcal{E}(f\varphi, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(f^2,\varphi) \quad ({}^\forall \varphi \in \mathcal{F}).$$

$\nu_f$ を関数 $f$ に対応するエネルギー測度と呼ぶ.

**注意 2.5.** この命題はより一般のディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ において成立する. ここでは $\mathbb{R}^d$ におけるエネルギー形式の場合を注意として述べる. $\mathbb{R}^d$ 上の標準エネルギー形式は, 適当な定義域のもとで,

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_{\mathbb{R}^d} (1/2) \cdot (\nabla f(x), \nabla g(x)) \, \mathrm{d}x$$

と表される. このとき, 命題 2.4 中の数式の右辺は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi f, f) - \frac{1}{2}\mathcal{E}(\varphi, f^2) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla(\varphi f), \nabla f)_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \varphi, \nabla(f^2))_{\mathbb{R}^d} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \cdot \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

と計算されるので，エネルギー測度の一意性より $f$ のエネルギー測度は $\nu_f(\mathrm{d}x) = (1/2)\cdot|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x$ である．この場合の $\nu_f$ は具体的に記述できるが, S.G. の場合のエネルギー測度は単純な表示式を持たない．

### 2.4 $N$ 次元 Sierpiński gasket 上の調和関数

**定義 2.6.** $h^{(0)}\colon V_0 \to \mathbb{R}$ に対し, 次を満たす唯一の $h \in \mathcal{F}$ を調和関数という．

$$h|_{V_0} = h^{(0)} \quad \text{かつ} \quad \mathcal{E}(h,h) = \mathcal{E}_0(h,h).$$

この $h$ を $\iota(h^{(0)})$ で表し, $\mathcal{H} := \{\iota(h^{(0)}) \mid h^{(0)}\colon V_0 \to \mathbb{R}\}$ と定める．

$\iota\colon \{h\colon V_0 \to \mathbb{R}\} \to \mathcal{H}$ は全単射な線型写像であることが知られているため, ベクトル空間の意味で次のような同一視ができる．

$$\mathcal{H} \simeq \{h\colon V_0 \to \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^{N+1}.$$

ここで, $|V_0| = N+1$ に注意する．特に, $\mathcal{H}$ は $(N+1)$ 次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間である．

### 2.5 Kusuoka measure・エネルギー密度関数

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{R}^{N+1}$ とベクトル空間の意味で同一視することにより, $\mathcal{H}$ には $\mathbb{R}^{N+1}$ から誘導される標準基底 $h_0, h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{H}$ が定まる．

**定義 2.7.** $\nu := \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \nu_{h_i}$ を Kusuoka measure という．

Kusuoka measure は次の定理の意味で Lebesgue 測度の対応物と考えることができる．

**定理 2.8** ([5], [6, Theorem 5.3.1])**.** 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して, $\nu_f$ は $\nu$ に対し絶対連続である．

これにより, エネルギー密度関数 $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ が定義される．

## 3 先行研究と主結果

2 次元 S.G. に関するエネルギー密度関数については，以下のような先行研究が知られている．

**定理 3.1** ([1, Theorem 3.5 Cor.])**.** 2 次元 S.G. 上の定数関数でない調和関数 $h$ に対して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の $\nu$-修正は S.G. 上の全ての点で不連続である．

この定理は，S.G. におけるエネルギー密度関数が $\mathbb{R}^d$ 上のエネルギー密度関数とは大きく異なる性質を持つことを主張している．実際, $\mathbb{R}^d$ 上の調和関数 $h$ に対応する $\mathbb{R}^d$ 上のエネルギー密度関数は $(1/2)\cdot|\nabla h|^2$ であり, この関数は連続となるような修正を持つからである．このような不連続性はフラクタル図形特有の性質であると考えられ, より一般のフラクタル図形に対しても類似の性質が予想される．本稿では $N$ 次元 S.G. 上の場合にほぼ同様な主張を得た．

**定理 3.2** ([3, Theorem 2.16]). $h \in \mathcal{H}$ は定数関数でないと仮定する．このとき, $\nu(\mathrm{SG} \setminus A) = 0$ なる SG の部分集合 $A$ が存在して, $\mathrm{d}\nu_h/\mathrm{d}\nu$ の任意の $\nu$-修正は $A$ の各点で不連続となる．

定理 3.2 は定理 3.1 に比べ, エネルギー密度関数の不連続性が $\nu$-零集合の補集合上でのみ成立しているという分弱い主張になっている．これは定理を示すために用いる，鍵となる主張が先行研究の場合と異なることが理由である．定理 3.1 を示すために使われた定理は以下の通りである．以下で，SG と相似な SG の部分集合を cell と呼ぶ．

**定理 3.3** ([1, Theorem 3.5]). $N = 2$ のとき, 定数関数でない任意の $h \in \mathcal{H}$ と任意の cell $C$ に対して次が成り立つ．

$$\operatorname*{essinf}_{x \in C} \frac{\mathrm{d}\nu_h}{\mathrm{d}\nu}(x) = 0,$$
$$\operatorname*{esssup}_{x \in C} \frac{\mathrm{d}\nu_h}{\mathrm{d}\nu}(x) = \frac{\mathcal{E}(h,h)}{3} (> 0).$$

ここで, esssup, essinf は $\nu$ に関するものである．

一方, 定理 3.2 を示すために使われる定理は以下の 2 つである．

**定理 3.4** ([3, Theorem 2.15]). $N$ を 2 以上の自然数とするとき, 定数関数でない任意の $h \in \mathcal{H}$ と任意の cell $C$ に対して次が成り立つ．

$$\operatorname*{essinf}_{x \in C} \frac{\mathrm{d}\nu_h}{\mathrm{d}\nu}(x) = 0.$$

ここで, essinf は $\nu$ に関するものである．

**定理 3.5** ([2, Theorem 5.6]). 定数関数でない任意の調和関数 $h_1$, $h_2$ について $\nu_{h_1}$ と $\nu_{h_2}$ は互いに絶対連続である．特に定数関数でない任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}\nu_h}{\mathrm{d}\nu}(x) > 0 \quad \nu\text{-a.e. } x \in \mathrm{SG}$$

が成立する．

定理 3.3 では，$\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の esssup と essinf が cell に依らず一定の値をとることを主張しているが，これは 2 次元であることの特殊性による．このことから，エネルギー密度関数の，すべての点における不連続性が示される．一方，$\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の esssup の値に関する同様な主張が $N$ 次元 S.G. についても成立するかどうかは不明であり, 代わりに用いた定理 3.5 は $\nu$-零集合を除く点における主張であることから, 現状では定理 3.2 のような形での不連続性のみが示されている．

## 4 主定理の拡張の可能性

主定理の改良に関して，以下のような問題が考えられる．

(i) 定理 3.4 において, 定理 3.3 のように $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の esssup を評価できるか．

(ii) より一般のフラクタル図形で類似の結果が成立するか.

(iii) $N$ 次元 S.G. における標準的でない 2 次形式ではどうか.

(i) について, $N=2$ のとき $\operatorname{esssup} \mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ を評価できるのは，次の主張が鍵となっている.

**命題 4.1** ([6, Section 5.3]). $\mathcal{H}$ を定数関数全体の集合で割った空間 $\tilde{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{E}$ を内積とする計量ベクトル空間となる. $(\tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{E})$ の任意の正規直交基底 $\{g_i\}_{i=1}^{N}$ に対して次の等式が成立する.

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_{g_i} = \frac{1}{N+1}\nu.$$

この命題より, $N=2$ のときは $\nu_{g_1}+\nu_{g_2}=\nu/3$ であるから, エネルギー測度と Kusuoka measure の測度の比を考えることにより $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の essinf の値から $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の esssup の値を得ることができる. $N>2$ のときはこのような論法が適用できず, $\mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu$ の esssup の値についての良い情報を得るには新たなアイディアが必要である.

(ii) について, $\operatorname{essinf} \mathrm{d}\nu_f/\mathrm{d}\nu = 0$ の証明には, $N$ 次元 Sierpiński gasket の図形としての対称性が駆使されている. 対称性がどの程度本質的な性質であるかは検討されるべき事項である.

(iii) について, 本稿では SG 上に定まる標準エネルギー形式のみを考察したが, 摂動を加えた 2 次形式も定義可能である. 摂動が十分小さい場合には主結果と類似の結果が成り立つだろうと予想している.

## 参考文献


[1] R. Bell, C. W. Ho and R. S. Strichartz, Energy measures of harmonic functions on the Sierpiński gasket, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 831–868.

[2] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **100** (2010), 269–302.

[3] K. Inui, Discontinuity of energy density function on Sierpiński gasket (in Japanese), Master thesis of Osaka University, (2017).

[4] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics **143**, Cambridge University Press (2001).

[5] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[6] R. S. Strichartz, *Differential equations on fractals: a tutorial*, Princeton University Press (2006).